

$$\text{Corr}(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{Var}(y)}}$$

## Эконометрическое моделирование

### Лабораторная работа № 8

#### Анализ временных рядов



## Оглавление

Понятие и виды временных рядов .....	3
Прогнозирование экономических показателей на основе экстраполяции тренда .....	3
Пример .....	4
Задания.....	9

## Понятие и виды временных рядов

Упорядоченная последовательность значений показателей (измеренных через равные промежутки времени), которые характеризуют развитие явления во времени, называется временным рядом.

Временные ряды экономических показателей можно подразделить на два основных вида: стационарные и нестационарные.

*Стационарные временные ряды* являются отражением некоторого случайного процесса, а сам процесс остается в равновесии относительно некоторого постоянного среднего уровня и его характеристики не зависят от момента времени.

Будем называть ряд  $(x_t)$  стационарным, если он *стационарен по среднему* (все уровни как случайные величины имеют одинаковые средние  $\bar{x}_i = \bar{x} = \text{const}$ ) и стационарен по разбросу (уровни имеют одинаковые дисперсии  $\sigma^2 = \text{const}$ ).

В *нестационарных временных рядах* случайные колебания происходят относительно среднего уровня, который со временем изменяется под влиянием различных факторов. Большинство экономических процессов описываются нестационарными временными рядами, в которых уровни ряда со временем повышаются или понижаются.

Общая долговременная тенденция временного ряда называется трендом.

Временные ряды некоторых экономических показателей обнаруживают периодичность изменения своих уровней относительно некоторого среднего уровня. Такие изменения во временном ряду принято называть периодическими. В зависимости от продолжительности периода колебаний последние подразделяются на сезонные и циклические колебания. Сезонные – период колебания до года, циклические – несколько лет.

## Прогнозирование экономических показателей на основе экстраполяции тренда

Задача разработки прогноза на основе экстраполяции может появиться как результат анализа управленческой ситуации, вследствие которой возникла проблема получения прогнозной информации о некотором объекте. Основные этапы проведения прогнозного исследования методом экстраполяции:

### 1. Анализ ситуации

1.1. Выдвижение гипотез о возможном развитии исследуемого объекта в ближайшем будущем.

1.2. Выявление и общий анализ факторов, благоприятствующих или препятствующих развитию объекта.

1.3. Анализ вопроса об инерционности развития объекта.

1.4. Анализ состояния информационной базы, затрат на сбор информации.

1.5. Вывод.

### 2. Постановка задачи

## Лабораторная работа № 8. Анализ временных рядов

2.1. Установление или уточнение экономического показателя, наиболее полно характеризующего объект прогнозного исследования.

2.2. Определение базы прогноза (периода времени в прошлом, на базе которого будет собираться информация о прогнозном объекте).

2.3. Определение допустимого периода упреждения.

2.4. Определение шага базы прогноза (год, месяц, неделя, день и т.д.).

2.5. Определение содержания уровней временного ряда (абсолютные, относительные, средние и т.д.).

2.6. Вывод.

### 3. Построение модели тренда

3.1. Сбор и анализ данных.

3.1.1. Оформление данных в таблицу.

3.1.2. Анализ данных и выбор формы модели.

3.1.2.1. Визуальный анализ. Построение и анализ графика. Вывод на основе визуального анализа.

3.1.2. 2 Аналитические методы обоснования выбора модели тренда:

а) сглаживание временного ряда, применение скользящих средних;

б) расчет конечных разностей (для полиномов);

в) использование аналитических критериев; общий вывод.

3.2 Количественная оценка параметров модели тренда на основе метода наименьших квадратов.

### 4. Проверка качества модели

5. Прогнозирование экономического показателя на основе модели тренда, путем экстраполяции.

## Пример

Фирма LFP, занимающаяся продажей товара М, провела исследование рынка товара по нескольким показателям.

В результате работы экспертов была выдвинута гипотеза о возможном развитии ситуации на рынке в ближайшем будущем, выявлены факторы, благоприятствующие и препятствующие росту продаж товара М, и установлено, что в целом изучаемый процесс обладает свойством инерционности, устойчивости, что обуславливает правомерность применения метода экстраполяции для прогнозирования.

Ниже, в таблице, приводятся статистические данные по объему продаж фирмы LFP за последние 12 лет.

t период времени	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
y объем продаж млн. руб.	2	4	6	5	7	10	12	12	14	16	18	20,5

Построить прогноз объема продаж на 2007 г., основываясь на результатах исследования экспертами ситуации на рынке.

Решение

1. На основе *визуального анализа данных* таблицы можно выдвинуть гипотезу о наличии возрастающей тенденции во временном ряду показателя объема продаж (У).

Построим график изменения объема продаж во времени.



Графический анализ данных подтверждает правильность выдвинутой гипотезы.

## 2. Расчет критерия Кендела.

Данный аналитический критерий позволяет установить, есть ли тренд во временном ряду и, если есть, то является ли он возрастающим убывающим.

$\tau = \frac{4p}{n(n-1)} - 1$ , где  $n$  – число уровней временного ряда;

$p$  – количество случаев, в которых для  $i < j$  выполняется условие  $y_i < y_j$ . Величина  $\tau$  меняется от  $-1$  до  $+1$ . Математическое ожидание  $\tau$  для случайного ряда и дисперсия соответственно равны:

$$M\tau = 0, \sigma_\tau^2 = \frac{2(2n + 5)}{9n(n - 1)}$$

Распределение  $\tau$  считают нормальным с квадратической ошибкой

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{2(2n + 5)}{9n(n - 1)}}$$

С целью проверки нулевой гипотезы  $H_0$  о равенстве нулю генерального коэффициента Кендела  $\tau^{(ген)}$  при заданном уровне значимости  $\alpha$ , вычисляют критическую точку:

$$T_{кр} = Z_{кр} \sqrt{\frac{2(2n + 5)}{9n(n - 1)}}$$

где  $Z_{кр}$  – критическая точка двусторонней критической области, определяемая по таблице функции Лапласа. Значение  $Z_{кр}$  вычисляется из соотношения:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

Итак, в нашем случае имеем

$$\tau = \frac{4p}{n(n-1)} - 1 = \frac{4 \cdot 64}{12(12-1)} - 1 = 0,9$$

Рассмотрим подробнее расчет величины  $P$  в таблице. Для того чтобы рассчитать  $p$  нужно отсортировать  $y$  по возрастанию  $t$ . В нашем случае, так как  $t$  – это время, все данные уже отсортированы. Далее для каждого  $t$ , начиная со второго, смотрим, сколько значений  $y$  меньше чем величина  $y$ , соответствующая рассматриваемому значению  $t$ .

Например, для  $t = 2$ ,  $y_2 = 4$ , что больше  $y_1 = 2$ . Поэтому в третьем столбце пишем цифру **1**. Для  $t = 3$ ,  $y_3 = 6$ , что больше  $y_2 = 4$  и  $y_1 = 2$ , поэтому в третьем столбце в третьей строке пишем цифру **2**. Для  $t = 4$ ,  $y_4 = 5$ , что больше  $y_2 = 4$  и  $y_1 = 2$ , но меньше чем  $y_3 = 6$ , поэтому в третьем столбце в четвертой строке пишем снова цифру **2**. Затем все полученные в третьем столбце значения складываем и получаем значение  $p = 64$ .

t	y	количество случаев, в которых для $i < j$ выполняется условие $y_i < y_j$ .
1	2	
2	4	<b>1</b>
3	6	<b>2</b>
4	5	<b>2</b>
5	7	4
6	10	5
7	12	6
8	12	6
9	14	8
10	16	9
11	18	10
12	20,5	11
	<b>P=</b>	<b>64</b>

Проверим статистическую значимость  $\tau$ . По таблице функции Лапласа находим  $Z_{кр}$

$$Z_{кр} = \Phi\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1 - 0,05}{2}\right) = \Phi(0,475) = 1,96$$

Тогда:

$$T_{кр} = 1,96 \sqrt{\frac{2(2 \cdot 12 + 5)}{9 \cdot 12(12 - 1)}} \approx 0,43$$

Следовательно,  $|\tau| > T_{кр}$  и  $\tau$  – статистически значим.

$\tau = 0,9$  свидетельствует о наличии четко выраженной возрастающей тенденции во временном ряду показателя объема продаж.

3. Итак, тенденция есть и она восходящая. Теперь необходимо определить класс функций, которому будет принадлежать наилучшая аппроксимирующая данный процесс функция. Для решения задачи этого этапа воспользуемся ранее построенным графиком. Из визуального анализа графика можно предположить, что данный процесс можно аппроксимировать функцией из класса линейных.

Проверим эту гипотезу, используя метод конечных разностей. Суть его сводится к расчету конечных разностей  $l$ -го порядка (первого второго, третьего и т.д.).

Если конечные разности  $n$ -го порядка приблизительно равны между собой, а средняя арифметическая разностей  $(n+1)$  порядка есть достаточно маленькая величина (близкая к 0), то аппроксимирующую функцию надо искать в классе функций, в основе которых лежит полином  $n$ -й степени.

Конечные разности 1-го порядка представляют собой разности между последующим и предыдущим значением уровней ряда. Из конечных разностей 1-го порядка формируют ряд, и для расчета конечных разностей 2-го порядка используют этот ряд: из последующего значения вычитают предыдущее и т.д.

Рассчитаем разности 1-го порядка и среднюю арифметическую из разностей 2-го порядка:

$L^{y/}$	Разности 1-го порядка	Разности 2-го порядка
2	-	-
4	2	-
6	2	0
5	-1	-3
7	2	3
10	3	1
12	2	-1
12	0	-2
14	2	2
16	2	0
18	2	0
20,5	2,5	0,5

Средняя арифметическая разностей второго порядка = 0,05.

Итак, первые разности можно принять приблизительно равными; средняя арифметическая вторых разностей равна 0,05, что есть величина достаточно маленькая, а это означает, что аппроксимирующую функцию надо искать в классе линейных функций. Следовательно, уравнение тренда будет линейным.

Найдем коэффициенты уравнения с помощью MS EXCEL:

$$\hat{y}_t = 0,05 + 1,6t$$

4. Прежде чем построить прогноз на 2007 год, необходимо проверить качество построенной модели тренда.

#### Оценка качества модели тренда

Оценка качества модели тренда производится сравнением фактических и модельных уровней и может осуществляться на основе следующих показателей:

1. Средней абсолютной погрешности

$$\overline{АП} = \frac{\sum |y_t - \hat{y}_t|}{n}$$

Где  $y_t$  – фактические уровни ряда,

$\hat{y}_t$  – соответствующие значения, вычисленные с помощью модели,

$n$  – число наблюдений.

2. Более универсальную оценку качества модели дает показатель средней относительной погрешности, который можно выражать в процентах

$$\overline{\text{ОП}} = \frac{\sum \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right|}{n} \cdot 100$$

Как правило, уровень погрешности 5% считается хорошим.

3. Если необходимо сравнить несколько различных функций, выбранных для аппроксимации тренда, используют показатель средней квадратической погрешности

$$S = \frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - m}$$

где  $m$  – число параметров модели тренда.

4. Следующим коэффициентом для оценки качества модели является «коэффициент несовпадения»

$$U = \frac{\sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sum y_t^2}{n}} + \sqrt{\frac{\sum \hat{y}_t^2}{n}}}$$

Где  $n$  – число наблюдений,

$\hat{y}_t$  – соответствующие значения, вычисленные с помощью модели,

$y_t$  – фактические уровни ряда.

Значения  $U$  принадлежат отрезку  $[0,1]$ , причем на концах отрезка он имеет следующую содержательную интерпретацию: при  $U = 0$  – отличное качество прогноза; при  $U = 1$  – плохое качество прогноза.

5. Построение прогноза.

А) Точечный прогноз на 2007 год, для 2007 года  $t=14$

$$\hat{y}_{2007} = 0,05 + 1,6 \cdot 14 = 22,45$$

Б) Интервальный прогноз на 2007 год.:

- Вычисляем среднеквадратичную ошибку  $S$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - m}}$$

- Рассчитываем ошибку на единицу  $v$

$$v = \frac{S}{\bar{y}}$$

- Определяем величину погрешности  $\Delta = \hat{y}_{\text{прог}} \cdot v$
- Строим интервальный прогноз

$$\hat{y}_{\text{прог}} - \Delta \leq y_{\text{прог}} \leq \hat{y}_{\text{прог}} + \Delta$$

В нашем примере получим:

$$S \approx 1,11; v = 1,11/10,5 \approx 0,11; \Delta = 22,45 \cdot 0,11 = 2,47, \text{ то}$$

$$19,98 \leq y_{\text{прог}} \leq 24,92.$$



**Задания***Вариант 1.*

На основе фактических данных об объеме операций за первые 10 дней кризиса подберите наилучшую модель тренда и дайте прогноз.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем операций, млрд руб.	75	60	65	40	43	28	20	22	16	20

*Вариант 2.*

Имеются данные о росте ВВП для некоторого государства. Подберите наилучший тренд для определения тенденции, наблюдаемой в данных об объеме ВВП. Определите среднегодовой темп роста ВВП, сделайте прогноз на следующий год.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем ВВП, млрд долл.	5	5,3	6,2	7,0	7,5	8,2	9,0	9,5	10,3	11

*Вариант 3.*

Для магазина по продаже спортивного зимнего инвентаря необходимо подобрать тренд и сделать прогноз объема выручки на основе данных за последние 10 месяцев.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Выручка, млн руб.	95	63	50	32	15	20	28	53	70	90

*Вариант 4.*

После сообщения об уменьшении ключевой ставки ЦБ объем операций на рынке кредитов резко возрос, а затем стабилизировался. Подберите наилучший тренд и сделайте прогноз на следующий период.

Дата	2.01	3.01	4.01	5.01	6.01	7.01	8.01	9.01	10.01	11.01
Объем операций, млн руб.	5	25	40	50	55	60	61	62	63	64

*Вариант 5.*

Какой МИД тренда лучше подходит для аппроксимации среднегодовых цен на нефть? Дайте прогноз на следующий год.

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Цена, долл/барр.	16,1	18,52	18,23	12,21	17,25	26,20	22,81	23,74	26,78	33,64

*Вариант 6.*

Необходимо подобрать тренд для прогноза динамики экспорта Великобритании и сделать прогноз.

*Лабораторная работа № 8. Анализ временных рядов*

Годы	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Экспорт	171,60	164,07	165,74	186,17	185,67	184,16	186,18	186,42	204,40	232,76

*Вариант 7.*

Объем мирового рынка товара А рос последние 10 месяцев. Подберите наилучший тренд и сделайте прогноз.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем рынка, млн долл.	16,1	18,52	18,23	12,21	17,25	26,20	22,81	23,74	26,78	33,64

*Вариант 8.*

Обнаружив, что объем продаж новой продукции начинает сокращаться, руководство компании решило в январе опустить уровень цен на данную продукцию, после чего объем продаж стал снова расти. Подберите тренд и сделайте прогноз объема продаж на следующий месяц.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем продаж, млн руб.	95	95	85	75	70	85	83	82	83	85

*Вариант 9.*

Подберите тренд для аппроксимации динамики мировой цены на товар А и сделайте прогноз на следующий год.

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Объем рынка, млн долл	17,92	20,67	19,99	19,72	23,97	28,50	24,44	25,02	28,83	27,27

*Вариант 10.*

Подберите тренд для определения тенденции объема продаж и сделайте прогноз.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем продаж, млн руб.	80	79	85	80	75	68	65	68	65	62

*Вариант 11.*

Постройте прогноз мировой цены на нефть, используя следующие данные о динамике среднегодовых цен на нефть.

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Цена, долл/барр.	16,1	18,52	18,23	12,21	17,25	26,2	22,81	23,74	26,78	33,64

*Вариант 12.*

Сделайте прогноз объема экспорта нефти из РФ на следующий год на основе следующих данных.

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Объем экспорта, млн	129,7	116,0	115,8	116,8	127,2	124,6	132,5	162,1	174,3	208,5

*Лабораторная работа № 8. Анализ временных рядов*

ТОНН									
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--